



---

**1. Designação da unidade curricular**

[3672] Cálculo Diferencial e Integral II / Differential and Integral Calculus II

---

**2. Sigla da área científica em que se insere**

MAT

---

**3. Duração**

Unidade Curricular Semestral

---

**4. Horas de trabalho**

148h 30m

---

**5. Horas de contacto**

Total: 67h 30m das quais TP: 67h 30m

---

**6. % Horas de contacto a distância**

Sem horas de contacto à distância

---

**7. ECTS**

5.5

---

**8. Docente responsável e respetiva carga letiva na Unidade Curricular**

[1525] Luís Mário Monteiro Lopes | Horas Previstas: N/D

---

**9. Outros docentes e respetivas cargas letivas na unidade curricular**

Não existem docentes definidos para esta unidade curricular

---

**10. Objetivos de aprendizagem e a sua compatibilidade com o método de ensino (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes).**

1. Dominar os conceitos básicos de limite, continuidade e diferenciabilidade de campos escalares e vectoriais.
2. Dominar o cálculo de integrais múltiplos, identificando a representação geométrica do domínio e reconhecendo quais as coordenadas a utilizar.
3. Dominar a representação paramétrica de linhas e superfícies e saber utilizá-la no cálculo de integrais de linha e de superfície.
4. Utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas reais.
5. Saber formular matematicamente um problema e identificar e implementar as estratégias.
6. Saber aplicar os principais conceitos e técnicas do cálculo diferencial e integral em  $\mathbb{R}^n$  nos contextos diversos das unidades curriculares da especialidade que a unidade curricular de Análise Vetorial serve.
7. Ter capacidades de análise, cálculo e raciocínio dedutivo.

---

**10. Intended Learning objectives and their compatibility with the teaching method (knowledge, skills and competences by the students).**

1. To master the concepts of limit, continuity and differentiability of real-valued and vector functions of several variables.
2. To master the calculation of multiple integrals, identifying the geometric representation of the domain and recognizing the appropriate coordinate system.
3. To master the parameterization of curves and surfaces and to apply it in the calculation of line and surface integrals.
4. To develop spatial visualization and deductive reasoning skills in the analysis and solution of applied problems.
5. To be able to formulate a mathematical problem and to identify and implement the appropriate strategies and tools to its analytical and/or computational solution.
6. To be able to apply the key concepts and techniques of differential and integral calculus in  $\mathbb{R}^n$  in the context of the various engineering-related courses of the program.
7. To have the capacity of analysis, algebra and deductive reasoning skills.

---

### 11. Conteúdos programáticos

1. Noções Topológicas em  $\mathbb{R}^n$ . Campos escalares e vectoriais. Domínio, conjunto de nível e gráfico; Limite e continuidade.

Cálculo Diferencial em  $\mathbb{R}^n$ : Derivada segundo um vector. Derivadas parciais; vetor gradiente. Diferenciabilidade. Plano tangente. Derivada como aplicação linear. Derivada da função composta. Derivadas parciais de ordem superior; teorema de Schwarz; funções de classe  $C_k$ . Operadores diferenciais: gradiente, divergência, rotacional. Teorema da função implícita. Fórmula de Taylor para campos escalares; extremos livres. Aplicações.

2. Cálculo Integral em  $\mathbb{R}^n$ : Integrais duplos e triplos: teorema de Fubini; teorema da média; mudança de variáveis. Integrais de linha: parametrizações; integral de linha de campos escalares e vectoriais. Trabalho; campos conservativos; função potencial. Teorema de Green. Integrais de superfície: parametrizações; integral de superfície de campos escalares e vectoriais. Fluxo; teorema da divergência; teorema de Stokes. Aplicações.

---

### 11. Syllabus

1. Topological notions in  $\mathbb{R}^n$ . Scalar and vector fields. Domain, level sets, and graph. Limits and continuity.

Differential Calculus in  $\mathbb{R}^n$ : directional derivative; partial derivative; differentiability of scalar fields; tangent plane; the derivative as a linear map (gradient vector/Jacobian matrix); chain rule; higher order partial derivatives, Schwarz theorem, class  $C_k$  function. Differential operators: gradient, divergence, and curl. Implicit function theorem. Taylor's formula for scalar fields. Local constraint-free extrema. Applications.

2. Integral Calculus in  $\mathbb{R}^n$ : double and triple integrals, Fubini's theorem, mean value theorem; change of variables. Line integrals: parameterization of a line; line integral of scalar and vector fields. Work, conservative fields, and potential. Green's theorem. Surface integrals: parameterization of a surface, integral surface scalar and vector fields. Flow, the divergence theorem, Stokes' theorem. Applications.

---

### 12. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

Os objetivos 1 a 4 são cumpridos nos conteúdos programáticos dos capítulos da unidade curricular, nos quais são ainda amplamente desenvolvidas as capacidades de análise, cálculo e raciocínio dedutivo (objetivo 7).

Para além das aplicações estudadas em cada capítulo, o recurso sistemático a problemas aplicados e contextualizados traduz-se numa maior motivação e eficácia da aprendizagem, uma vez que permitem

\* transmitir o facto de o cálculo diferencial e integral em  $\mathbb{R}^n$  ser uma ferramenta indispensável no estudo da engenharia;

\* praticar a formulação matemática de problemas, sua resolução e crítica (objetivos 5 e 7);

\* facilitar aos alunos o reconhecimento dos conceitos e técnicas estudados quando a estes têm que recorrer no seguimento dos seus estudos (objetivo 6).

---

**12. Evidence of the syllabus coherence with the curricular unit's intended learning outcomes**

Goals 1 to 4 are met within the contents of the syllabus, in which the capacity of analysis, algebra and deductive reasoning are widely developed (goal 7).  
In addition to the applications studied in each topic, the systematic use of applied, problems and contextualized yields an increase of motivation, efficiency and spectrum of learning, since they enable  
\* to convey the fact that differential and integral calculus in IRn is an indispensable tool in the study of engineering;  
\* to practice the mathematical formulation of problems, their solution and criticism (goals 5 to 7);  
\* to help students recognize the concepts and techniques studied when they have to use it in their future studies (goal 6).

---

**13. Metodologias de ensino e de aprendizagem específicas da unidade curricular articuladas com o modelo pedagógico**

Aulas teóricas com exemplos de aplicações e aulas teórico-práticas com resolução de exercícios teórico-práticos e práticos. É dado especial ênfase a problemas que interligam as ferramentas com conceitos estudados em UCs da especialidade.

---

**13. Teaching and learning methodologies specific to the curricular unit articulated with the pedagogical model**

Lectures based on applied examples and practical classes in which theoretical-practical, problems are solved. Special emphasis is given to problems connecting the tools developed with concepts which are important in engineering-related courses.

---

**14. Avaliação**

Avaliação Distribuída com Exame Final:  
A avaliação de conhecimentos será efetuada através de 2 testes escritos (TE1 e TE2) e duas fichas (F1, F2) individuais e não pedagógicamente fundamentais.  
TE1 é realizado a meio do semestre  
TE2 é realizado em regime de Exame Parcial na Época Normal

A componente de testes pode ser substituída por um exame final (EF).  
Onde:

TE1 e TE2  $\geq$  8,00 e nota dos testes NT =  $(TE1+TE2)/2 \geq 9,50$   
EF  $\geq 9,50$

A classificação final (CF  $\geq 9,50$ ) é obtida pela equação:

$CF = 0,90 \cdot (NT; EF) + 0,05 \cdot F1 + 0,05 \cdot F2$

Caso não tenha obtido a classificação mínima, o aluno pode repetir qualquer dos testes na Época de Recurso, em regime de Exame Parcial, mantendo-se a classificação das restantes avaliações.

---

#### 14. Assessment

Distributed Assessment with Final Exam:

Knowledge assessment will be carried out through 2 written tests (WT1 and WT2) and two individual and non-pedagogically fundamental forms (F1, F2).

WT1 is held in the middle of the semester

WT2 is carried out as a Partial Exam in the Normal Season

The testing component can be replaced by a final exam (FE).

Where:

WT1 and WT2  $\geq 8.00$  and test score  $T = (WT1 + WT2)/2 \geq 9.50$

FE  $\geq 9.50$

The final classification (FC  $\geq 9.50$ ) is obtained by the equation:

$$FC = 0.90 \cdot (T; FE) + 0.05 \cdot F1 + 0.05 \cdot F2$$

If the student has not obtained the minimum classification, he or she may repeat any of the tests during the Appeal Period, as a Partial Exam, maintaining the classification of the remaining assessments.

---

#### 15. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular

As aulas teóricas são essenciais a uma rigorosa e completa cobertura dos tópicos do programa, os quais surgem como resposta a situações e problemas práticos. A resolução de exercícios em contexto de aula permite ilustrar a aplicação prática dos conceitos e ferramentas estudados, ao mesmo tempo que se aprofundam os conhecimentos teóricos.

As listas de exercícios disponibilizadas, pela sua organização, conteúdo e diversidade do grau de dificuldade, permitem ao aluno acompanhar minuciosamente todos os tópicos da matéria e são o principal instrumento do estudo individual. Os exercícios que as constituem são os adequados ao desenvolvimento das capacidades de cálculo e raciocínio dedutivo.

---

#### 15. Evidence of the teaching methodologies coherence with the curricular unit's intended learning outcomes

Lectures are essential to a correct and comprehensive coverage of all topics of the syllabus, while in-class solution of exercises allows for a successful application of the theoretical knowledge to practical problems.

The available sheets of exercises, by their organization, contents and diversity of difficulty degree, allow students to follow closely all topics of the syllabus and are the main tools regarding individual study. The exercises that constitute them are particularly well-suited for the development of algebra skills and deductive reasoning.

---

**16. Bibliografia de consulta/existência obrigatória**

- I. Coelho, Apontamentos de CDI2, DM, ISEL, 2023
- A. Paixão, P. Gomes, Cálculo Vectorial - Definições, teoremas, exemplos e observações, DM, ISEL, 2017
- G. Pires, Cálculo Diferencial e Integral em  $\mathbb{R}^N$ , IST Press, 2016
- E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 10th ed, Wiley, 2011
- J. Campos Ferreira, Introdução à Análise em  $\mathbb{R}^N$ , IST, 2004
- A. Azenha, M. A. Jeronimo, Elementos de Cálculo Diferencial e Integral em  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^n$ , McGraw-Hill, 1995
- T. Apostol, Calculus vol. II, 2nd Edition, John Wiley & Sons Inc., 1969
- H. Anton, Calculus: A New Horizon, 6ª Edição, John Wiley & Sons Inc., 1998
- H. Anton, I. Bivens, S. Davis, Calculus Multivariable, Wiley-Blackwell, 2008
- R. Larson, R. P. Hostetler, B. H. Edwards, Cálculo, Volume 2, 8ª Edição, McGrawHill, 2006
- J. Marsden, A. Tromba, Vector Calculus, 6th Edition, W.H. Freeman and Company, 2011
- W. McCallum, D. Hughes-Hallet, et al., Multivariable Calculus, 5th Edition, International Student Version, John Wiley & Sons, 2010

---

**17. Observações**

Unidade Curricular Obrigatória

Data de aprovação em CTC: 2024-07-17

Data de aprovação em CP: 2024-06-26