



Ficha de Unidade Curricular A3ES  
Métodos Matemáticos para Engenharia  
Licenciatura em Engenharia Civil  
2025-26

---

**1. Designação da unidade curricular**

[3694] Métodos Matemáticos para Engenharia / Mathematical Methods to Civil Engineering

---

**2. Sigla da área científica em que se insere**

MAT

---

**3. Duração**

Unidade Curricular Semestral

---

**4. Horas de trabalho**

148h 30m

---

**5. Horas de contacto**

Total: 67h 30m das quais TP: 45h 00m | P: 22h 30m

---

**6. % Horas de contacto a distância**

Sem horas de contacto à distância

---

**7. ECTS**

5.5

---

**8. Docente responsável e respetiva carga letiva na Unidade Curricular**

[1634] Bruno Miguel Almeida Martins Pereira | Horas Previstas: 135 horas

---

**9. Outros docentes e respetivas cargas letivas na unidade curricular**

[1674] Sérgio Paulo Fino de Sousa Lopes | Horas Previstas: 67.5 horas

**10. Objetivos de aprendizagem e a sua compatibilidade com o método de ensino (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes).**

- 1-Modelar em tempo discreto e contínuo.
- 2-Classificar pontos fixos.
- 3-Resolver alguns tipos de e.d.o.'s e compreender os métodos de resolução.
- 4-Esboçar campos de inclinações.
- 5-Encontrar e classificar pontos de equilíbrio. Esboçar linhas de fase.
- 6-Estudar osciladores.
- 7-Estudar a flexão de vigas bidimensionais.
- 8-Analisar sistemas de e.d.o.'s, lineares.
- 9-Estudar sistemas de e.d.o.'s não lineares na vizinhança dos pontos de equilíbrio.
- 10-Iniciar o uso de software de programação matemática.
- 11-Implementar métodos numéricos para resolução de equações e sistemas não lineares.
- 12-Implementar métodos numéricos para resolução de equações e sistemas de equações diferenciais.
- 13-Combinar técnicas analíticas, qualitativas e numéricas no estudo de equações e sistemas de equações diferenciais.
- 14-Desenvolver um raciocínio estruturado e demonstrar capacidade analítica e crítica na resolução de problemas no domínio da engenharia

**10. Intended Learning objectives and their compatibility with the teaching method (knowledge, skills and competences by the students).**

- 1-Modeling in discrete and continuous time.
- 2-Classify fixed points
- 3-Solve some types of e.d.o.'s and understand the methods of resolution.
- 4-Sketch slope fields.
- 5-Find and classify equilibria. Sketch phase lines.
- 6-Study oscillators.
- 7-Study the bending of two-dimensional beams.
- 8-Analyze systems of linear o.d.e's.
- 9-Study systems of non linear o.d.e's. in the neighborhood of the equilibrium points.
- 10-Introduce software for doing mathematics.
- 11-Implement numerical methods for solving equations and non-linear systems.
- 12-Implement numerical methods for solving equations and systems of differential equations.
- 13-Combine analytical, qualitative and numerical techniques in the study of equations and systems of differential equations.
- 14-To develop a structured reasoning and to demonstrate analytical and critical capacity in the resolution of engineering problems.
- ?????

**11. Conteúdos programáticos**

- 1 Introdução aos sistemas dinâmicos discretos. Noção de ponto fixo.**
- 2 Métodos numéricos para resolução de equações:**
  - 2.1. Método da Bissecção**
  - 2.2. Método do ponto fixo**
  - 2.3. Método de Newton**
- 3 EDOs de 1a Ordem**
  - 3.1 Introdução**
  - 3.2 Separação de variáveis**
  - 3.3 EDOs exatas**
  - 3.4 EDOs lineares**

3.5 Campos de inclinações

3.6 Existência e unicidade de soluções

3.7 Equilíbrios e a linha de fases

4 Métodos numéricos para EDOs de 1ª ordem

4.1 Método de Euler

4.2 Métodos de Runge-Kutta

5- EDOs de 2ª ordem e ordens superiores

5.1 EDOs de 2ª ordem homogéneas, com coeficientes constantes

5.2 Oscilações livres: O sistema massa-mola

5.3 Osciladores harmónicos forçados

5.4 Ressonância

5.5 EDOs de ordem superior a 2, modelação de vigas bidimensionais

6 Métodos numéricos para EDOs de ordem superior a 1.

7 Resolução de sistemas de EDOs Lineares

7.1 Propriedades dos sistemas de EDOs lineares

7.2 Estudo dos sistemas através dos valores próprios

7.3 Resolução com recurso à Transformada de Laplace

---

## 11. Syllabus

- 1 Introduction to discrete dynamical systems. Fixed points of a function.
- 2 Numerical methods for solving equations
  - 2.1 Bisection Method
  - 2.1 Fixed Point Method
  - 2.2 Newton's Method
- 3 1st Order ODEs
  - 3.1 Introduction
  - 3.2 Separation of variables
  - 3.3 Exact ODEs
  - 3.4 Linear ODEs
  - 3.5 Slope fields
  - 3.6 Existence and uniqueness of solutions
  - 3.7 Equilibria and the phase line
- 4 Numerical methods for first order ODEs
  - 4.1 Euler's method
  - 4.2 Runge-Kutta's Methods
- 5 - Second and higher orders linear ODEs
  - 5.1 Homogeneous 2nd order linear ODEs, with constant coefficients
  - 5.2 Free oscillations: The mass-spring system
  - 5.3 Forced Harmonic Oscillators
  - 5.4 Resonance
  - 5.5 ODEs of order greater than 2, modeling of two-dimensional beams
- 6 Numerical methods for ODEs with order greater than 1.
- 7 Systems of linear ODEs
  - 7.1 Properties of systems of linear ODEs
  - 7.2 Usage of eigenvalues to study these systems
  - 7.3 Solution of the system using Laplace's Transform

**12. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular**

Objs. 1,15: Transversais; Objs. 2,3: Secs 1,2; Obj 4: Secs. 3.1?-3.4; Obj. 5: Secs. 3.5,3.6; Obj. 6: Secs. 3.6,3,7; Obj 7: Sec 5; Obj 8: Sec 5.5; Obj 9: Sec 7; Obj 10: Sec 8; Objs 11,12,13,14: Secs 2,6,9.

**12. Evidence of the syllabus coherence with the curricular unit's intended learning outcomes**

Global intended learning outcomes 1,15.  
Learning outcomes . 2,3: Sections 1,2;  
Learning outcomes 4: Sections 3.1?-3.4;  
Learning outcomes. 5: Sections 3.5,3.6;  
Learning outcomes. 6: Sections 3.6,3,7;  
Learning outcomes 7: Section 5;  
Learning outcomes 8: Section 5.5;  
Learning outcomes 9: Section 7;  
Learning outcomes 10: Section 8;  
Learning outcomes 11,12,13,14: Sections 2,6,9.

**13. Metodologias de ensino e de aprendizagem específicas da unidade curricular articuladas com o modelo pedagógico**

As aulas são TP ou PL, nas TP apresenta-se a teoria, exemplos e algumas demonstrações, seguidos da resolução de exercícios. Nas PL apresentam-se e implementam-se métodos numéricos.

**13. Teaching and learning methodologies specific to the curricular unit articulated with the pedagogical model**

Classes are either TP (Theoretical and Practical) or PL (Programming Laboratory). In TP classes, theory, examples, and some proofs are presented, followed by exercise solving. In PL classes, numerical methods are presented and implemented.

---

#### 14. Avaliação

A avaliação de conhecimentos é no modo avaliação distribuída com exame final.

A avaliação de conhecimentos será efetuada através de 2 testes escritos (TE1 e TE2) e dois projetos (P1 e P2) pedagogicamente fundamentais, que serão realizados durante o período letivo. Nos termos do novo modelo pedagógico, os dois projetos versam o desenvolvimento de exercícios pelos estudantes com recurso a equipamentos de laboratório, implicando uma avaliação destinada à validação dos conhecimentos adquiridos nas aulas PL.

A componente de testes pode ser substituída por um exame final (EF). Os testes e projetos devem verificar as condições

TE1 e TE2  $\geq 8,00$  e nota dos testes  $NT = (TE1+TE2)/2 \geq 9,50$

P1 e P2  $\geq 8,00$  e nota dos projetos  $NP = (P1+P2)/2 \geq 9,50$

O Exame Final terá como nota mínima 9,50.

A classificação final CF, cuja nota mínima é igualmente 9,50, é obtida pela equação:

$$CF = 0,75 * (\max(NT, EF)) + 0,25 * NP$$

Caso não tenha obtido a classificação mínima, o aluno pode repetir qualquer dos testes na Época de Normal, em regime de Exame Parcial, mantendo-se a classificação das restantes avaliações.

---

#### 14. Assessment

The knowledge assessment is a distributed assessment with a final exam.

Knowledge assessment will be carried out through two written tests (TE1 and TE2) and two pedagogically fundamental projects (P1 and P2), which will be conducted during the academic period. Under the new pedagogical model, the two projects involve the development of exercises by students using laboratory equipment, involving an assessment aimed at validating the knowledge acquired in PL classes. The test component can be replaced by a final exam (EF).

The tests and projects must meet the following conditions:

TE1 and TE2  $\geq 8.00$  and test grade  $NT = (TE1 + TE2)/2 \geq 9.50$

P1 and P2  $\geq 8.00$  and project grade  $NP = (P1 + P2)/2 \geq 9.50$

The Final Exam will have a minimum grade of 9.50.

The final grade CF, which also has a minimum of 9.50, is obtained by the equation:

$$CF = 0.75 * (\max(NT, EF)) + 0.25 * NP$$

If the minimum grade is not achieved, the student may retake any of the tests during the Normal Period, under the Partial Exam regime, while keeping the grades of the other assessments.

---

**15. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular**

Os objetivos gerais de uma disciplina de Matemática Aplicada à Engenharia, são, tendo em conta os constrangimentos habituais - tempo disponível e nível de conhecimentos prévios por parte dos alunos - introduzir aos alunos, de uma forma teoricamente sólida, as principais técnicas matemáticas utilizadas na área específica da engenharia em causa, com óbvia focalização nas respetivas aplicações. Tais objetivos são atingidos na metodologia utilizada, sendo reforçada a componente de aplicação à Engenharia Civil, na componente Prática Laboratorial.

---

**15. Evidence of the teaching methodologies coherence with the curricular unit's intended learning outcomes**

Considering the usual constraints of time availability and the level of prior knowledge of the students, the general objectives of a discipline in Applied Mathematics for Engineering are to introduce students, in a theoretically sound manner, to the main mathematical techniques used in the specific engineering field in question, with an obvious focus on their respective applications. These objectives are achieved in the methodology used, being reinforced the application component to Civil Engineering, in the Laboratory Practice component.

---

**16. Bibliografia de consulta/existência obrigatória**

D. Acheson, From Calculus to Chaos, An Introduction to Dynamics, Oxford University Press (1997)  
T. M. Apostol, Calculus, Vol. II, Second Edition, Wiley.  
P. Blanchard, R. L. Devaney, G. R. Hall, Differential Equations, Brooks/Cole (1997).  
R. L. Devaney, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Benjamin/Cummings (1986).  
E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics (10th Edition), Wiley (2011).  
R. May, Stability and Complexity in Model Ecosystems, 2nd ed., Princeton University Press (1975).

---

**17. Observações**

Unidade Curricular Obrigatória

Data de aprovação em CTC: 2024-07-17

Data de aprovação em CP: 2024-06-26