

## Ficha de Unidade Curricular – (Versão A3ES)

### 1. Caracterização da Unidade Curricular.

- 1.1. **Designação da unidade curricular**  
Métodos Matemáticos em Engenharia Biomédica
- 1.1. **Title of curricular unit**  
Mathematical Methods in Biomedical Engineering
- 1.2. **Sigla da área científica em que se insere (100 carateres).**  
MAT
- 1.3. **Duração<sup>1</sup>**  
Semestral
- 1.4. **Horas de trabalho<sup>2</sup>**  
130
- 1.5. **Horas de contacto<sup>3</sup>**  
T – 30 TP - 30
- 1.6. **ECTS**  
5
- 1.7. **Observações<sup>4</sup>**  
Opção
- 1.7. **Remarks (1.000 carateres).**  
Option

2. **Docente responsável e respetiva carga letiva na Unidade Curricular (preencher o nome completo) (1.000 carateres).**  
José Alberto Rodrigues

3. **Outros docentes e respetivas cargas letivas na unidade curricular (1.000 carateres).**  
Cristina Isabel Caetano Ferreira Januário  
Jorge das Neves Duarte

4. **Objetivos de aprendizagem (conhecimentos, aptidões e competências a desenvolver pelos estudantes). (1.000 carateres).**

Após aprovação na unidade curricular, o aluno deverá ser capaz de:

1. Compreender o processo de modelação inerente à resolução de um problema concreto.
2. Discutir a formulação de modelos utilizando técnicas analíticas.
3. Utilizar técnicas e métodos computacionais adequados para o estudo da dinâmica de um modelo.
4. Validar um modelo e estimar parâmetros.
5. Empreender uma análise qualitativa das soluções obtidas.
6. Interpretar os resultados obtidos no processo de modelação.
7. Aplicar os conceitos abordados na modelação de diferentes mecanismos naturais.
8. Identificar e utilizar os temas abordados na resolução de problemas no contexto da Engenharia Biomédica.

**4. Intended learning outcomes (knowledge, skills and competences to be developed by the students). (1.000 characters).**

After the student receives approval on the curricular unit, he should be able to:

1. Understand the modelling process necessary to solve a practical problem.
2. Discuss the models formulation using analytical techniques.
3. Use techniques and computational methods to study the models dynamics.
4. Validate a model and estimate parameters.
5. Undertake a qualitative analysis of the solutions.
6. Interpret the results of the modelling process.
7. Apply the studied concepts to model several natural mechanisms.
8. Identify and use the studied subjects in the resolution of problems in the context of the Biomedical Engineering.

**5. Conteúdos programáticos (1.000 carateres).**

1. A modelação matemática na Engenharia Biomédica. Conceitos básicos de modelação. Modelos empíricos e modelos mecanísticos.
2. Dinâmica unidimensional. Modelos discretos e modelos contínuos, lineares e não-lineares. Comportamento qualitativo geral das soluções, critérios de estabilidade de pontos de equilíbrio. Pontos periódicos e ciclos limite. Pontos de bifurcação e caos.
3. Sistemas dinâmicos discretos. Exemplos concretos de modelos e suas propriedades gerais. A álgebra matricial e os modelos fisiológicos. Valores próprios, vectores próprios e o comportamento assintótico das soluções.
4. Sistemas dinâmicos contínuos. Exemplos concretos de modelos e suas propriedades gerais. Análise no plano de fases e estabilidade.
5. Estudo de modelos com Equações Diferenciais Parciais e métodos de resolução analíticos e numéricos
6. Anatomia de algumas aplicações atuais no contexto da Engenharia Biomédica: (i) modelos fisiológicos, (ii) farmacocinética e farmacodinâmica, (iii) crescimento, morte, diferenciação e migração de células, (iv) epidemiologia

**5. Syllabus (1.000 characters).**

1. Mathematical modeling in Biomedical Engineering. Basic concepts of modeling. Empirical models and mechanistic models.
2. One-dimensional population dynamics. Discrete and continuous models, linear and nonlinear models. General behavior of qualitative solutions, stability criteria of equilibrium points. Periodic points and limit cycles. Bifurcation points and chaos.
3. Discrete dynamical systems. Concrete examples of models and their general properties. Matrix algebra and population models. Eigenvalues, eigenvectors and the asymptotic behavior of the solutions.
4. Continuous dynamical systems. Concrete examples of models and their general properties. Phase plane analysis and stability.

5. Modelling by Partial Differential Equations, resolution by analytical and numerical methods.

6. Anatomy of current applications in the context of Biomedical Engineering: (i) physiological models,

(ii) pharmacokinetics and pharmacodynamics, (iii) cell growth, death, differentiation and migration (iv) epidemiology

**6. Demonstração da coerência dos conteúdos programáticos com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular (1.000 caracteres).**

O objectivo programático 1 é cumprido com a apresentação do conteúdo programático 1.

Os objectivos programáticos 2, 3, 4, 5 e 6 são cumpridos com a apresentação dos conteúdos programáticos 2, 3, 4 e 5, nos quais são amplamente desenvolvidas as capacidades de análise e interpretação de modelos.

Os objectivos programáticos 7 e 8 são cumpridos com a apresentação do conteúdo programático 6.

Para além da teoria estudada em cada capítulo, o recurso sistemático a problemas que ilustram os diferentes conceitos ministrados, traduz-se numa maior motivação, eficácia e espectro da aprendizagem por parte dos alunos. Em particular, as aplicações concretas possibilitam:

- a) transmitir o facto de que a teoria estudada permite a análise e caracterização de modelos de sistemas biológicos;
- b) praticar a formulação matemática de problemas, sua resolução e crítica dos resultados obtidos;
- c) ajudar os alunos a reconhecer os conceitos e técnicas estudados quando estes surgirem em outros cursos da sua trajetória académica.

**6. Evidence of the syllabus coherence with the curricular unit's intended learning outcomes (1.000 characters).**

Program objective 1 is met with the presentation of the programmatic content 1.

Programmatic objectives 2, 3, 4, 5 and 6 are met with the presentation of programmatic content 2, 3, 4 e 5, in which the capabilities of model analysis and interpretation are widely developed.

Program objectives 7 and 8 are met with the presentation of the programmatic content 6.

Besides the theory studied in each chapter, the systematic use of problems that illustrate the different concepts taught, translates into a greater motivation, effectiveness and spectrum of the students' learning. In particular, concrete applications enable:

- a) to transmit the fact that the theory studied allows the analysis and characterization of models of biological systems;
- b) to practise the mathematical formulation of problems, their resolution and criticism of the results obtained;
- c) to help students recognize the concepts and techniques studied when they appear in other courses of their academic trajectory.

**7. Metodologias de ensino (avaliação incluída) (1.000 caracteres).**

Estudo dos temas utilizando a tecnologia disponível e envolvendo a participação activa dos alunos.

Os alunos realizarão um exame (E) (60% da classificação final (NF)) e um trabalho (T) (40% da classificação final (NF)) ao longo do curso.

O trabalho envolve a resolução de problemas, modelação e o uso de técnicas e métodos computacionais adequados.

$$NF = 0.6 \times E + 0.4 \times T$$

**7. Teaching methodologies (including assessment) (1.000 characters).**

Study of the subjects using the available technology and involving the active participation of the students.

Students will take an exam (E) (60% of the final grade (NF)) and an assignment (T) (40% of the final grade (NF)) throughout the course.

The work involves problem solving, modeling and the use of appropriate computational techniques and methods.

$$NF = 0.6 \times E + 0.4 \times T$$

**8. Demonstração da coerência das metodologias de ensino com os objetivos de aprendizagem da unidade curricular (3.000 caracteres).**

As aulas teórico-práticas são essenciais a uma rigorosa e completa cobertura dos tópicos do programa, enquanto que a resolução de problemas no contexto da Engenharia Biomédica permite ilustrar a aplicação prática dos conceitos e ferramentas estudados. O trabalho individual desenvolverá a autoconfiança nos processos de resolução de problemas e a análise crítica dos resultados.

**8. Evidence of the teaching methodologies coherence with the curricular unit's intended learning outcomes (3.000 characters).**

The theoretical-practical classes are essential to a rigorous and complete coverage of the topics of the program, while the problem solving in the context of the Biomedical Engineering allows to illustrate the practical application of the concepts and tools studied. Individual work will develop self-confidence in problem-solving processes and critical analysis of results.

**9. Bibliografia de consulta/existência obrigatória (1.000 caracteres).**

J. Bronzino, D. Peterson; Biomedical Engineering Fundamentals (The Biomedical Engineering Handbook, Fourth Edition), CRC Press Taylor & Francis, 2015.

S. Dunn, A. Constantinides, P. Moghe; Numerical Methods in Biomedical Engineering: A volume in Biomedical Engineering, Academic Press, 2006.

J. Enderle, J. Bronzino, Introduction to Biomedical Engineering, 3<sup>rd</sup> Edition, Elsevier, 2012.

D. Kaplan, L. Glass; *Understanding nonlinear dynamics*, Springer-Verlag, 1998.

G. Ledder, *Mathematics for the Life Sciences*, Springer, 2013.

G. de Vries, T. Hillen, M. Lewis, J. Müller, B. Schönfisch; *A course in mathematical biology*, Siam, 2006.

N. Britton, *Essential mathematical biology*, Springer-Verlag, 2003.

---

<sup>1</sup> Anual, semestral, trimestral, ...

<sup>2</sup> Número total de horas de trabalho.

<sup>3</sup> Discriminadas por tipo de metodologia adotado (T - Ensino teórico; TP - Ensino teórico-prático; PL - Ensino prático e laboratorial; TC - Trabalho de campo; S - Seminário; E - Estágio; OT - Orientação tutorial; O - Outro).

<sup>4</sup> Assinalar sempre que a unidade curricular seja optativa.